

学术讨论

[编者按] 本刊在 1992 年第七卷第三、四期上连续发表了“湍流的通用物理方程”、“湍流通用物理方程的推导及讨论”,并且写了“编后语”,提出“希望对上述两篇文章进行公开讨论”。随后在其他学报上发表了批评这两篇文章的论文,形成了“百家争鸣”的局面,活跃了学术思想。本期发表“关于涡流问题的注记”,也是对上述两篇文章提出不同观点的论文,我们希望继续收到这方面的投稿,以便在本刊中展开学术讨论,实现本刊创刊时的宿愿,把学报办成百家争鸣的园地。上述两篇文章的作者高歌教授,正准备在实践的基础上进一步投稿,参加这场学术讨论。

关于湍流问题的注记

中国科学院大气物理研究所 赵松年\*\*

【摘要】 指出 N-S 方程是研究湍流所遵循的基本方程,Reynolds 方程反映了在湍流中随机性与确定性共存; Burgers-KdV 方程与湍流机理无关,不能作为湍流研究的“新方程”。

主题词: 湍流 N-S 方程 雷诺数

分类号: O357.5

N-S 方程

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{\rho} \mathbf{F} \quad (1)$$

是 Newton 第二定律在连续介质假定下对流体(包括大气系统)的具体应用。O. Reynolds 在 1883 年把任一瞬时量分解成平均量与脉动量之和,即

$$u_i = \bar{u}_i + u_i', \quad p = \bar{p} + p' \quad (2)$$

从而得到 Reynolds 方程

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k^2} - \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_k} \quad (3)$$

由于增加了脉动场对平均场的应力项  $\tau_{ik} = - \rho \overline{u_i u_k}$  而造成的“非闭合”问题,曾使一些研究人员对 N-S 方程的正确性产生怀疑,40 年代 Burgers 曾建议用 Burgers 方程代替 N-S 方程<sup>[1]</sup>;近期,在国内高歌等人<sup>[2,3]</sup>建议用 KdV-Burgers 方程作为湍流的运动方程或规范方程。

高歌等提出了用所谓“侧偏系综平均(off-center ensemble average)”来代替 Reynolds 平均(2),并由此得出 KdV-Burgers 方程<sup>[4]</sup>,《中国科学》A 辑(1985 年 5 月,1987 年 1 月和 1991

年 9 月) 与《科学通报》(1989 年第 1 期) 曾分别刊登一组论述 KdV - Burgers 方程作为湍流规范方程的论文<sup>[2,3,5,6]</sup>, 由于该组论文涉及到统计力学(尤其是系综) 基本假设(等概率性) 和湍流问题的重要概念问题, 引起从事湍流研究与应用方面的科技人员的关注, 郑哲敏等人<sup>[7]</sup>指出, 高歌的论文<sup>[4,8]</sup> 存在严重的概念与基本错误, 与此有关的结论均不能成立。

上述一组论文的基础是文献[4] 中提出的侧偏系综平均, 即

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= V_0 + u'_1, \quad V_i = V_0 + u'_i, \quad \bar{V} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \\ \bar{V}' &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u'_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (V_i - V_0) = \bar{V} - V_0 \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

很明显, 式(4) 的主要结果是  $\bar{u}' \neq 0$ , 意即等概率性不成立, 因此式(4) 失去物理意义<sup>[9,10]</sup>。究其原因, 在于  $V_1$  与  $V_i$  的表示式应取如下形式

$$V_1 = V_{10} + u'_1, \quad V_i = V_{i0} + u'_i \quad (5)$$

因而可得:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (V_{i0} + u'_i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_{i0} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u'_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_{i0} \end{aligned} \quad (6)$$

亦即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u'_i = 0$ , 符合等概率性(或者说遍历性)。其实, 符合观测结果因而具有明确物理意义的平均方法是唯一的或者说是等价的<sup>[11]</sup>。对于 Burgers 方程

$$u_t + uu_x - \alpha u_{xx} = 0 \quad (\alpha > 0) \quad (7)$$

而言, 在 Hopf - Cole 变换<sup>[12]</sup>  $u = -2\alpha(w_x/w)$  或  $u = -2\alpha(\partial/\partial x) \ln w(x, t)$  之下, 可转化为线性热传导方程  $w_t = \alpha w_{xx}$ 。同样, KdV 方程

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (8)$$

可以变换为 Schrodinger 方程<sup>[13]</sup>:  $\Psi_{xx} - (u - \lambda)\Psi = 0$  的位势  $u$ , 通过散射反演求出解析解。

式(1) 在无粘性( $\mu = 0$ )、不可压缩流体(水)、恒定重力场的条件下可以简化为 Euler 方程, 并导出 KdV 方程。对于一维情况, 当  $\mu = 0$  时, 有

$$u_t + uu_x = -\frac{1}{\rho} \nabla p = -\frac{1}{\rho} p_x \quad (9)$$

压力为  $f = -\text{grad}U = (1/\rho)p_x$ 。按位移  $y$  如图 1 所示作线性展开<sup>[14]</sup>,  $f = f_2 y_{xx} + f_4 y_{4x} + f_6 y_{6x} + \cdots + f_{2n} y_{2nx}$  是恢复力;  $f_4 f_{4x}$  是流体中表面张力和流体有限深度引起的色散力。因此, 在浅水波或长波与小振幅极限情况下有  $u_t + uu_x \doteq f_2 f_{xx} + f_4 f_{4x}$ 。设  $u = y_t$ ,  $u_t = y_{tt}$ , 则有  $y_{tt} + y_t y_{tx} = f_2 y_{xx} + f_4 y_{4x}$ 。选择适当的  $x, t, y$  的单位, 可得  $y_{tt} = y_{xx} - 12\epsilon y_t y_{tx} + 2\epsilon y_{4x}$ , 其解为  $y = y_+(x+t) + y_-(x-t)$  ( $\epsilon$  的零阶近似)。以正行波为例

$$y = y(x-t, \Theta) = y(\xi, t), \quad \xi = x-t, \tau = \Theta \quad (10)$$

则有

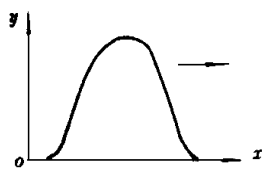


图 1 一维孤波波形

$$\left. \begin{aligned} y_t &= \epsilon y_\tau - y_\xi, & y_u &= -\epsilon y_\tau + \epsilon^2 y_{\tau\tau} + y_{\xi\xi} - \epsilon y_{\xi\tau} \\ y_x &= y_\xi, & y_{xx} &= y_{\xi\xi} \\ y_t y_{tx} &= \epsilon^2 y_\tau y_{\tau\xi} - \epsilon(y_\xi y_{\tau\xi} + y_\tau y_{\xi\xi}) + y_\xi y_{\xi\xi}, & y_{4x} &= y_{4\xi} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

由此得 $-\epsilon y_\tau + \epsilon^2 y_{\tau\tau} + y_{\xi\xi} - \epsilon y_{\xi\tau} = y_{\xi\xi} - 12\epsilon(\epsilon^2 y_\tau y_{\tau\xi} - \epsilon y_\xi y_{\tau\xi} - \epsilon y_\tau y_{\xi\xi} + \epsilon y_\tau y_{\xi\xi} + y_\xi y_{\xi\xi}) + 2\epsilon y_{4\xi}$ 。因为 $\epsilon \sim 0$ , 因此只保留 $\epsilon$ 的一次项, 注意到 $y_\tau = y_{\xi\tau}$ , 则有

$$-2\epsilon y_{\xi\tau} = -12\epsilon y_\xi y_{\xi\xi} + 2\epsilon y_{4\xi} \quad (12)$$

令 $u = y_\xi$ , 即得 KdV 方程

$$u_\tau = 6uu_\xi - u_{\xi\xi} \quad (13)$$

$\tau$  用  $t$  表示,  $\xi$  用  $x$  表示, 则有如下通常的形式

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (14)$$

所以, KdV 方程是 N-S 方程的一种简化特例。

由 KdV + Burgers 方程即式(6) + 式(8)得出如下方程

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0 \quad (15)$$

即 B-KdV 方程, 文献[2~6, 8]认为上述方程有耗散项( $-\nu u_{xx}$ )、色散项( $\beta u_{xxx}$ ), 从而可以代替 N-S 方程成为湍流的规范方程, 其实这只是根据湍流能量级串和拟序结构提出的唯象的经验方程, 它并不源出于湍流的动力学方程, 正如文献[7]中指出的, 湍流应满足连续性方程

$$(\partial \rho / \partial t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \quad \text{或} \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (16)$$

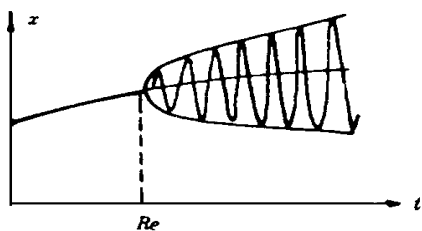
它使得 B-KdV 方程只能有  $u \equiv 0$  的平凡解, 说明 B-KdV 方程对于湍流问题没有物理意义。

文献[4, 8]正是因为忽略了式(14), 致使他们得到的解类没有唯一性, 无论是鞍-结异宿轨道解<sup>[6]</sup>还是鞍-焦异宿轨道解<sup>[3]</sup>均与 N-S 方程或湍流问题无关, 如其不然, 仅从唯象观点出发, 用正弦积分<sup>[15]</sup>

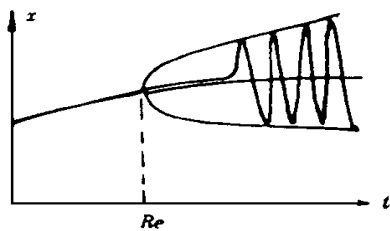
$$S_i(t) = \int \frac{\sin t}{t} dt \quad (17)$$

同样可以解释文献[3]与[5, 6]根据 B-KdV 方程的解析式作出的有关说明, 但是式(17)除了曲线型式与文献[3, 5, 6]一致外, 显然与湍流的机理毫无关系。

在混沌现象和孤立子理论启发下, 应当把式(3)理解为流体动力学中的确定性 $\bar{u}_i$ 与随机性 $-\rho \overline{u_i u_k}$ 的统一与共存,  $(\partial \overline{u_i u_k} / \partial x_k)$ 是流体内禀的随机性的体现, Reynolds 伟大功绩正在于此, 确定性与随机性的竞争由  $Re$  之值来确定, 转捩过程预计有图2所示的失稳的延迟图案。



(a) 理论估计



(b) 实际测量

图2 湍流转捩过程((a)理论估计(b)实际测量)

拟序结构的发现(其实在热对流中早已观测到这种结构<sup>[16]</sup>), 预示着湍流在空间演化中相

位信息对自组织过程(即拟序结构)具有关键作用。

当 $\langle (\mathbf{u} \times \mathbf{u}) \rangle \neq 0$ 时螺旋型小尺度湍流速度场 $\mathbf{u}$ 便形成大尺度平均流场 $\langle \mathbf{u} \rangle$ ,它具有 $\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{u} \rangle \neq 0$ 的性质,实际上是一种拟序结构。S. S. Moiseev 建议用螺度 $h \equiv \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})$ 来描述这类大尺度拟序结构<sup>[17]</sup>。在流场中, $v_x, v_y \sim \epsilon$ (小量),而 $v_z \sim \epsilon^2, \partial/\partial x, \partial/\partial y \sim \epsilon^0$ ,而 $\partial/\partial z \sim \epsilon$ ,这时涡量 $\Omega \equiv \nabla \times \mathbf{u}$ ,即

$$\Omega = \left[ \frac{\partial l}{\partial y} - \frac{\partial l}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[ \frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial l}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[ \frac{\partial l}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y} \right] \mathbf{k} = \Omega \mathbf{i} + \Omega \mathbf{j} + \Omega \mathbf{k} \quad (18)$$

显然, $\Omega \sim \epsilon^2, \Omega \sim \epsilon^2, \Omega \sim \epsilon$ ,也就是说 $\Omega$ 在刻划涡旋状态时高估了 $u, v$ 的作用,而降低了 $w$ 对涡流形成的贡献,采用螺度则有 $h \equiv \mathbf{u} \cdot \Omega$ 即

$$h \equiv u \Omega_x + v \Omega_y + w \Omega_z = h_x + h_y + h_z \quad (19)$$

可见, $h$ 的各分量 $h_x, h_y$ 及 $h_z$ 均属于三阶小量 $\epsilon^3$ ,同时包含了流场 $\mathbf{u}$ 与涡旋 $\Omega$ 两种运动模式之间的耦合<sup>[18]</sup>。

混沌是湍流内在随机性的表现,拟序结构(与孤立子现象有关)是湍流空间有序性的体现,只有通过理论研究,数值模拟与实验观测<sup>[18]</sup>三方面共同努力,才有希望在探索复杂性的层次上对湍流获得深刻的认识<sup>[20]</sup>。

## 参 考 文 献

- 1 Burgers J M. A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence. Adv. Appl. Mech., 1, 1948: 171~99
- 2 高歌. 湍流的耗散及弥散相互作用理论. 中国科学(A 辑), 1985, (5): 457~465
- 3 刘式达, 刘式适. 湍流的 KdV - Burgers 方程模型. 中国科学(A 辑) 1991, (9): 938~946
- 4 高歌. 湍流的通用物理方程. 航空动力学报, 1992, 7(3): 199~203
- 5 管克英, 高歌. Burgers - K - dV 混合型方程行波解的定性分析. 中国科学, 1987, (1): 64~73
- 6 熊树林. Burgers - KdV 方程的一类解析解. 科学通报, 1989, (1): 26~29
- 7 郑哲敏, 庄逢甘, 张涵信, 朱如曾, 李家春, 黄永念, 林贞彬. 对“湍流通用物理方程”等两篇文章的意见. 力学学报, 1993, 25(6): 744~758
- 8 高歌. 湍流通用物理方程的推导及讨论. 航空动力学报, 1992, 7(4): 295~304
- 9 李政道. 统计力学. 北京师范大学出版社, 1984: 2~18
- 10 王竹溪. 统计物理学导论. 高等教育出版社, 1965: 6~29, 163~179
- 11 Favre A J A. Formulation of the Statistical Equations of Turbulent Flows with Variable Density. 1992: 324~341, Studies in Turbulence (T. B. Gatski et al Editor) Springer Verlag, New York Inc
- 12 Jackson E A. Perspectives of Nonlinear Dynamics. 1990, (2): 365~367, Cambridge University Press
- 13 Drazin P G, Johnson R S. Solitons: an Introduction, 1989: 20~33, Cambridge University Press
- 14 G. 艾仑伯格著, 刘之景译, 朱栋培, 王子修校. 孤立子—物理学家用的数学方法. 科学出版社, 1989: 13~14,
- 15 赵松年, 于允贤. 信号分析与遥测技术. 地震出版社, 1983: 40~41
- 16 D. J. 特里顿著, 董务民等译. 物理流体力学. 科学出版社, 1986: 40~53
- 17 Moiseev S S. Helical Mechanism of the Large Scale Structure Generation in Continuum Media. IWNTTP- 4, Moscow, 1989
- 18 邱孝明. 第 4 届国际物理学中的非线性与湍流过程专题讨论会(IWNTTP- 4). 力学进展, 1990, 20(4): 499~505
- 19 赵松年, 洪钟祥, 胡非. 大气边界层湍流的综合观测实验及其动力学特征的研究. 自然科学进展, 1992, 2(2): 104~111
- 20 赵松年. 非线性科学: 它的内容、方法和意义. 科学出版社, 1994: 45~65

## RELIABILITY ANALYSIS OF LOW-CYCLE FATIGUE LIFE FOR A DISC

Lu Wenlin and Zhang Dingzhen

(7th Dept. Northwestern Polytechnical University, Xian 710072)

### ABSTRACT

When a failure model with low-cycle fatigue is identified, the failure function for reliability analysis reduced as follows: As cumulative damage of varying-amplitude cycles is calculated with Miner's law, the total damage is considered to be a random value varying from 0.3 to 3, and follows logarithmic normal distribution. Furthermore, damage of low-cycle loads of each amplitude is evaluated according to the formula of flow-cycle fatigue life prediction proposed by R. W. Landgraf. Then, the failure function for reliability analysis is derived from the above formulas by transforming strain expression into stress expression. If a stress at certain point of a disk is influenced by a disturbance of some random variables, the stochastic finite element method is employed to find the variance of the stress distribution. When stresses in a disk are in elasto-plastic condition, nonlinear SFEM is required to obtain the variance of the stresses. Finally, a numerical example for a disk with equal thickness is presented and is verified by the Monte-Carlo simulation.

**Key words** Fatigue life Stochastic finite element Reliability

## OPTIMIZATION OF TURBINE BLADE FIR-TREE ROOTS

Cheng Kaijun and Ma Mei

(4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

### ABSTRACT

An optimization system for "fir-tree" root is developed for design layout of the "fir-tree" joint area in gas turbine so as to decrease the weight of aero engine and shorten the design cycle. This system is suitable to design the 2~5 pairs of teeth used in modern aero engines. After the optimization the smallest weight subject to the static strength constraints has been attained, the FEM is used to check the distribution of stresses, particularly the concentration stress, and the results are shown on the screen for making decision.

**Key words** Aircraft engine Fir-tree Blade root Optimization

## COMMENT ON THE PROBLEM OF TURBULENCE

Zhao Songnian

(Institute of Atmospheric Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)

### ABSTRACT

This paper points out that Navier-Stokes equation is an essential equation for studying turbulent flows, it governs the motion of fluid flows. Reynolds equation represents coexistence of random and determinative phenomena in the turbulent flows. But, Burgers-KdV equation has no relation to mechanism of turbulence, so we can't regard it as a "new equation" for researching turbulent flows.

**Key words** Turbulence Navier-Stokes equations Reynolds